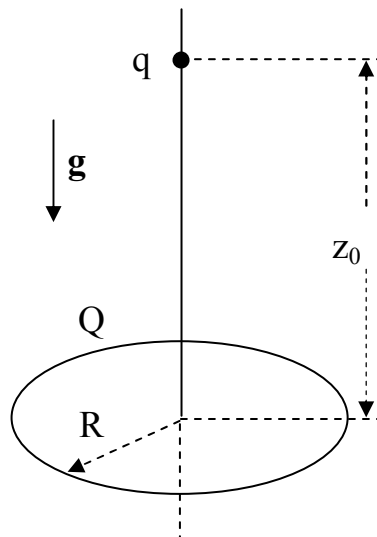


PHẦN GIẢI BÀI TẬP

(180 phút không kể thời gian phát đề)

Bài 1.

Cho một vành mảnh làm bằng chất điện môi, bán kính R , tích điện $Q > 0$ phân bố đều trên vành. Vành được đặt nằm ngang trong trọng trường. Một hạt bụi rất nhỏ khối lượng m , tích điện $q > 0$, nằm trên trục của vành ở phía trên cách tâm vành một khoảng z_0 (xem hình vẽ). Bằng đồ thị, hãy khảo sát chuyển động của hạt bụi phụ thuộc vào vị trí ban đầu z_0 (xét tính chất của chuyển động: đều, nhanh dần, chậm dần, dao động ..., các vị trí cân bằng). Giả thiết rằng hạt bụi chỉ chịu tác dụng của trọng lực và lực tĩnh điện gây ra bởi vành.



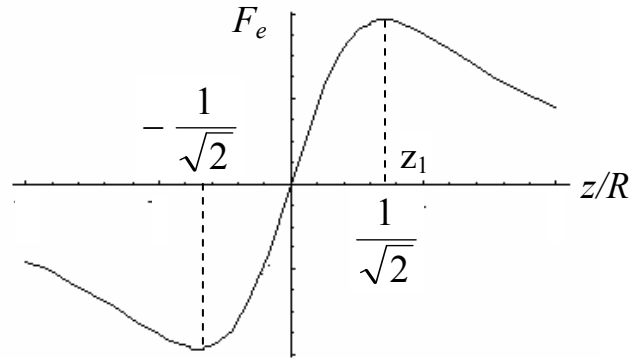
Bài giải

Chọn trục z trùng với trục của vành, hướng lên trên, điểm $z = 0$ đặt tại tâm của vành. Lực tổng cộng tác dụng lên hạt bụi là

$$\begin{aligned} F(z) &= F_e + F_g \\ &= k \frac{qQ}{(R^2 + z^2)^{3/2}} z - mg \end{aligned} \quad (1)$$

trong đó $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$, g là gia tốc trọng trường, F_e là lực tĩnh điện, F_g là lực hấp dẫn.

Để thấy $F_e(0) = 0$, $F_e \rightarrow 0$ khi $|z| \rightarrow \infty$, $F_e > 0$ với $z > 0$, $F_e < 0$ với $z < 0$. Đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của F_e vào z có dạng



Giá trị cực đại $F_{e,\max}$ của F_e đạt được tại điểm $z_1 > 0$ là nghiệm của phương trình $\frac{dF_e}{dz} = 0$. Ta nhận được $z_1 = R/\sqrt{2}$, $F_{e,\max} = k \frac{2qQ}{3^{3/2} R^2}$.

Đồ thị của lực tổng cộng $F(z)$ có dạng giống đồ thị của F_e , nhận được bằng cách tịnh tiến đồ thị F_e ngược chiều trục z một đoạn bằng mg .

- Trường hợp $F_{e,\max} < mg$:

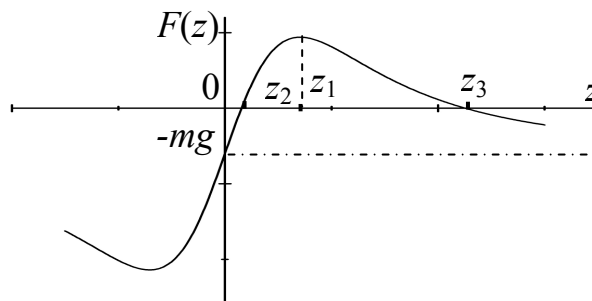
Lực tổng cộng $F < 0$ tại mọi điểm, hạt bụi sẽ chuyển động nhanh dần ngược chiều trục z ra xa vô cùng, không phụ thuộc vào vị trí ban đầu của hạt bụi.

- Trường hợp $F_{e,\max} = mg$:

$F < 0$ nếu $z \neq z_1$ và $F = 0$ tại $z = z_1$. Do đó, nếu $z_0 \neq z_1$ hạt bụi chuyển động nhanh dần ngược chiều trục z ra xa vô cùng. Vị trí $z = z_1$ là vị trí cân bằng không bền.

- Trường hợp $F_{e,\max} > mg$:

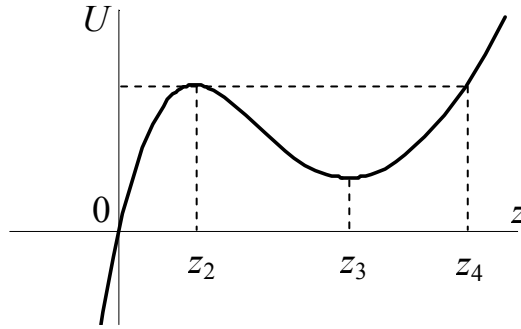
Đồ thị của lực tổng cộng $F(z)$ như là hàm của z có dạng



Lực tổng cộng $F = 0$ tại hai điểm z_2, z_3 ($0 < z_2 < z_1 < z_3$). $F < 0$ nếu $z < z_2$ hoặc $z > z_3$, $F > 0$ nếu $z_2 < z < z_3$. Thế năng tổng cộng của hạt bụi là

$$\begin{aligned}
 U(z) &= -\int_0^z dz F(z) = -kqQ \int_0^z dz \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} + mgz \\
 &= kqQ \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{1}{R} \right] + mgz
 \end{aligned} \tag{2}$$

với điều kiện $U(z=0)=0$. Đồ thị của $U(z)$ có dạng



Ký hiệu z_4 là điểm mà $U(z_2) = U(z_4)$. Do đó,

- Nếu $z_0 < z_2$ hoặc $z_0 > z_4$: hạt chuyển động nhanh dần ngược chiều trục z ra xa vô cùng.

Nếu $z_2 < z_0 < z_4$, hạt dao động xung quanh vị trí z_3 . Nếu z_0 rất gần z_3 , lực tác dụng lên hạt có biểu thức gần đúng

$$F(z) \approx -\alpha\xi \quad , \tag{3}$$

trong đó

$$\xi = z - z_3 \quad , \quad \alpha = -\left. \frac{dF}{dz} \right|_{z=z_3} = -k \frac{qQ}{(R^2 + z_3^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3z_3^2}{R^2 + z_3^2} \right] > 0 \quad . \tag{4}$$

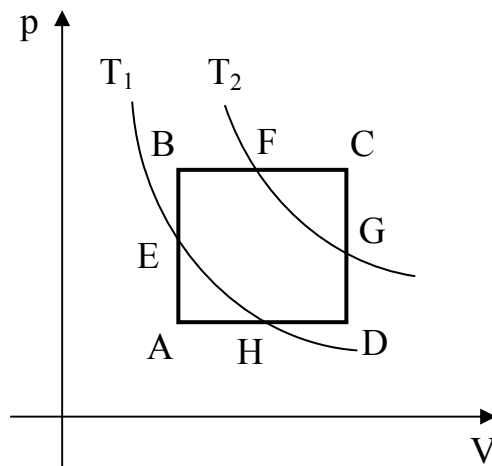
Trong trường hợp này, hạt bụi dao động điều hòa xung quanh vị trí z_3 với tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$, biên độ $\xi_0 = |z_0 - z_3|$.

Vị trí z_2 là vị trí cân bằng không bền, vị trí z_3 là vị trí cân bằng bền.

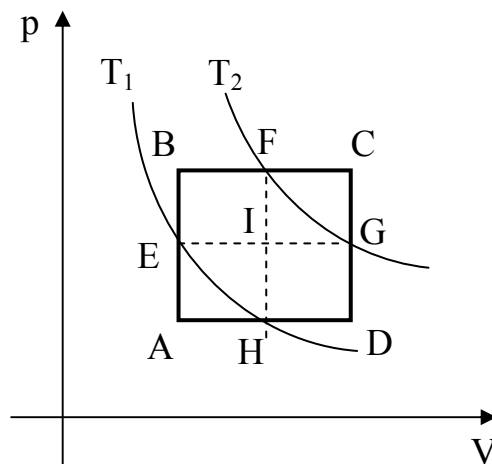
Bài 2.

Xét một chu trình gồm hai quá trình đẳng tích và hai quá trình đẳng áp. Trên hình vẽ là giản đồ p-V của chu trình. Hoạt chất là 1 mol khí lý tưởng gồm các phân tử hai nguyên tử. Điểm giữa đường đẳng áp phía dưới H và điểm giữa đường đẳng tích bên trái E nằm trên cùng một đường đẳng nhiệt ứng với nhiệt độ T_1 . Điểm giữa đường đẳng áp phía trên F và điểm giữa đường đẳng tích bên phải G nằm trên cùng một đường đẳng nhiệt ứng với nhiệt độ T_2 .

- Xác định nhiệt độ của khối khí tại các điểm A, B, C, và D.
- Xác định công khối khí thực hiện trong chu trình ABCDA.
- Xác định hiệu suất lý thuyết của máy nhiệt hoạt động theo chu trình này.



Bài giải



- Trong quá trình đẳng tích, áp suất tỷ lệ thuận với nhiệt độ. Tương tự, trong quá trình đẳng áp, thể tích cũng tỷ lệ thuận với nhiệt độ. Đường EG là đường đẳng áp, đường FH là đường đẳng tích. Tại giao điểm I của đường EG và FH ta có

$$T_I = \frac{T_E + T_G}{2} = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) \quad . \quad (1)$$

Ta cũng có

$$\frac{T_B}{T_E} = \frac{T_C}{T_G} = \frac{T_F}{T_I} \quad , \quad \frac{T_A}{T_E} = \frac{T_D}{T_G} = \frac{T_H}{T_I} \quad . \quad (2)$$

Do đó,

$$\begin{aligned} T_B &= \frac{T_E T_F}{T_I} = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2} \quad , \quad T_D = \frac{T_G T_H}{T_I} = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2} \quad , \\ T_C &= \frac{T_G T_F}{T_I} = \frac{2T_2^2}{T_1 + T_2} \quad , \quad T_A = \frac{T_E T_H}{T_I} = \frac{2T_1^2}{T_1 + T_2} \quad . \end{aligned} \quad (3)$$

b. Công W do khối khí thực hiện trong một chu trình bằng diện tích hình chữ nhật ABCD. Do đó

$$\begin{aligned} W &= (p_B - p_A)(V_D - V_A) = p_B V_D - p_B V_A - p_A V_D + p_A V_A \\ &= p_C V_C - p_B V_B - p_D V_D + p_A V_A = R(T_C - T_B - T_D + T_A) \\ &= 2R \frac{(T_2 - T_1)^2}{T_1 + T_2} \quad . \end{aligned} \quad (4)$$

c. Nhiệt dung mol đẳng tích C_v và đẳng áp C_p của hoạt chất là

$$C_v = \frac{5}{2}R \quad , \quad C_p = \frac{7}{2}R \quad . \quad (5)$$

Hoạt chất nhận nhiệt trong các quá trình AB và BC. Nhiệt lượng tương ứng là

$$Q_{AB} = C_v(T_B - T_A) = \frac{5}{2}R \frac{2T_1(T_2 - T_1)}{T_1 + T_2} \quad , \quad (6)$$

$$Q_{BC} = C_p(T_C - T_B) = \frac{7}{2}R \frac{2T_2(T_2 - T_1)}{T_1 + T_2} \quad . \quad (7)$$

Nhiệt lượng tổng cộng hoạt chất nhận được là

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} = R \frac{(7T_2 + 5T_1)(T_2 - T_1)}{T_1 + T_2} \quad . \quad (8)$$

Vậy hiệu suất lý thuyết của máy nhiệt là

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{2(T_2 - T_1)}{7T_2 + 5T_1} \quad . \quad (9)$$

Bài 3. Sự mở rộng của vạch phổ nguyên tử

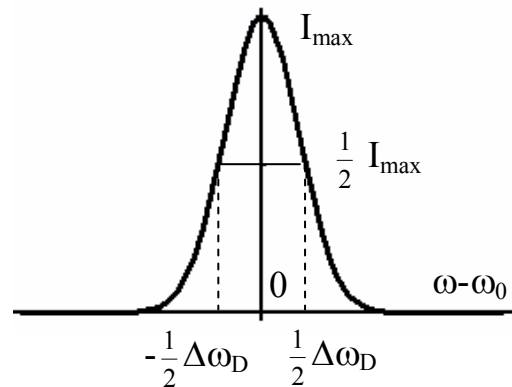
a. Để mô tả phổ bức xạ điện từ của nguyên tử, người ta có thể sử dụng mô hình dao động tử điều hòa. Trong mô hình này, nguyên tử được xem như một hạt có khối lượng m , điện tích e , dao động một chiều với lực phục hồi $-\mathbf{m}\omega_0^2\mathbf{x}$. Ở đây, ω_0 là tần số góc của bức xạ điện từ do nguyên tử phát ra.

Để mô tả độ rộng tự nhiên $\Delta\omega_{TN}$ (ví dụ, do phát xạ tự phát) của vạch phổ, ta có thể đưa vào lực ma sát tỷ lệ với vận tốc của dao động tử điều hòa, $F_{ms} = -\gamma \dot{x}$ cho $t > 0$, với γ là hằng số, $0 < \frac{\gamma}{m\omega_0} \ll 1$. Lực ma sát dẫn đến dao động tắt dần, năng lượng của dao động tử giảm theo thời gian.

Nếu năng lượng của dao động tử giảm theo thời gian theo quy luật hàm số mũ thì sau khoảng thời gian τ năng lượng của dao động tử giảm đi e lần. Khi đó τ được gọi là thời gian sống của mức năng lượng kích thích của nguyên tử.

Hãy tìm biểu thức mô tả sự suy giảm năng lượng của dao động tử theo thời gian và xác định độ rộng tự nhiên $\Delta\omega_{TN}$ của vạch phổ ứng với tần số ω_0 trong mô hình nói trên.

b. Ngoài mở rộng tự nhiên, mở rộng Doppler $\Delta\omega_D$ là sự mở rộng vạch phổ do hiệu ứng Doppler trong hệ nguyên tử hay phân tử có một phân bố vận tốc nhất định. Các hạt (nguyên tử hoặc phân tử) phát xạ mà có vận tốc khác nhau sẽ có độ dịch Doppler khác nhau, dẫn đến vạch phổ bị mở rộng. Sự mở rộng do chuyển động nhiệt của các hạt được gọi là mở rộng Doppler do nhiệt. Trong trường hợp này, độ mở rộng vạch phổ là độ rộng của phân bố phổ cường độ bức xạ ở nửa cực đại, chỉ phụ thuộc vào tần số của vạch phổ, khối lượng của hạt phát xạ và nhiệt độ của hệ hạt (xem hình vẽ).



Cho một khối khí đơn nguyên tử. Xét vạch phổ ứng với tần số ω_0 do các nguyên tử phát ra khi đứng yên. Giả sử khối khí ở nhiệt độ T và phân bố vận tốc của nguyên tử tuân theo phân bố Boltzmann

$$P(v) dv = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-mv^2/(2kT)} dv \quad ,$$

trong đó m là khối lượng của nguyên tử, k là hằng số Boltzmann, v là thành phần vận tốc theo một hướng cho trước nào đó.

Hãy chứng minh độ mở rộng Doppler do nhiệt được cho bởi biểu thức

$$\Delta\omega_D = 2 \frac{\omega_0}{c} \sqrt{(2\ln 2) \frac{kT}{m}} \quad .$$

Các nguyên tử chuyển động nhiệt có tốc độ nhỏ so với tốc độ ánh sáng trong chân không c nên có thể bỏ qua các hiệu ứng tương đối tính.

c. Một đèn thủy ngân phát xạ 10^{18} photon trong một giây ứng với vạch phổ 2537 Å. Giả thiết rằng hơi thủy ngân trong đèn có mật độ nhỏ và ở trạng thái cân bằng nhiệt có nhiệt độ $T = 300$ K. Hãy tính độ mở rộng Doppler của vạch phổ. Công suất bức xạ của đèn ở vạch phổ này là bao nhiêu?

Cho biết khối lượng một nguyên tử thủy ngân là $m = 3,33 \times 10^{-22}$ g, hằng số Boltzmann $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K, hằng số Planck $h = 6,626 \times 10^{-34}$ Js .

Hướng dẫn

Xét phương trình vi phân

$$A \frac{d^2}{dx^2} f(x) + B \frac{d}{dx} f(x) + C = 0 \quad ,$$

trong đó A , B , và C là các thông số không phụ thuộc vào biến số x . Lời giải của phương trình trên có thể tìm dưới dạng

$$f(x) \propto e^{\alpha x}$$

với α là thông số không phụ thuộc vào x và được xác định bởi các thông số A , B , C .

Bài giải

a. Phương trình chuyển động của dao động tử điều hòa khi có lực ma sát

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - \gamma \dot{x} \quad . \quad (1)$$

Tìm nghiệm dưới dạng

$$x(t) \sim e^{\alpha t} \quad , \quad (2)$$

ta nhận được

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2m}t} e^{\pm i\omega_0 t} \quad , \quad t > 0 \quad . \quad (3)$$

Ta có thể chọn một trong hai nghiệm trên, ví dụ, nghiệm ứng với dấu +.

Năng lượng của dao động tử điều hòa W tỷ lệ với $|x|^2$, do đó

$$W = W_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t} \quad . \quad (4)$$

Theo định nghĩa (đã nêu ở đầu bài), thời gian sống của mức năng lượng kích thích của nguyên tử là

$$\tau = \frac{m}{\gamma} \quad . \quad (5)$$

Tương ứng, theo nguyên lý bất định giữa năng lượng và thời gian, độ rộng của mức năng lượng kích thích Γ thỏa mãn

$$\Gamma\tau \geq \hbar, \quad \text{do đó} \quad \Gamma = \frac{\hbar\gamma}{m}. \quad (6)$$

Do mức năng lượng kích thích có độ rộng Γ nên vạch phổ tương ứng có độ rộng tự nhiên

$$\Delta\omega_{\text{TN}} = \frac{\Gamma}{\hbar} = \frac{\gamma}{m}. \quad (7)$$

b. Giả sử nguyên tử chuyển động với vận tốc v theo phương hướng về nguồn thu bức xạ: $v > 0$ ($v < 0$) nếu nguyên tử chuyển động về phía nguồn thu (ra xa nguồn thu). Khi đó, do hiệu ứng Doppler, nguồn thu ghi nhận bức xạ có tần số

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right). \quad (8)$$

Cường độ bức xạ có tần số trong khoảng $(\omega, \omega+d\omega)$ tỷ lệ với số nguyên tử có vận tốc trong khoảng $(v, v+dv)$. Do đó,

$$I(\omega)d\omega = I_0 e^{-\frac{mc^2}{2\omega_0^2 kT}(\omega-\omega_0)^2} d\omega, \quad (9)$$

trong đó $I(\omega)$ là phân bố phổ cường độ bức xạ, I_0 là giá trị cực đại của phân bố phổ. Ký hiệu $\Delta\omega_D$ là độ rộng Doppler. Ta có

$$I(\omega_0 - \Delta\omega_D/2) = I(\omega_0 + \Delta\omega_D/2) = I_0/2. \quad (10)$$

Từ (9) và (10) rút ra

$$\Delta\omega_D = 2 \frac{\omega_0}{c} \sqrt{(2\ln 2) \frac{kT}{m}}. \quad (11)$$

c. Biểu thức liên hệ tần số với bước sóng của bức xạ là

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \quad (12)$$

do đó, ứng với bước sóng $\lambda = 2537 \text{ \AA}$ là tần số $\omega = 7,43 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$. Độ rộng Doppler của vạch phổ là

$$\Delta\omega_D = 6,5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}. \quad (13)$$

Công suất bức xạ A được cho bởi biểu thức

$$A = n \hbar\omega, \quad (14)$$

trong đó n là số photon phát ra trong một đơn vị thời gian. Vậy

$$A = 0,78 \text{ W}. \quad (15)$$

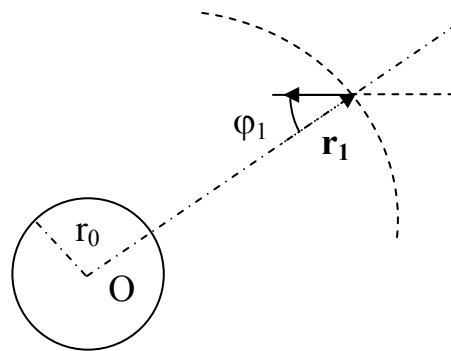
Bài 4.

Một tia laser đi vào môi trường có đối xứng cầu (xem hình vẽ). Chiết suất của môi trường thay đổi theo khoảng cách r tới tâm đối xứng O theo quy luật

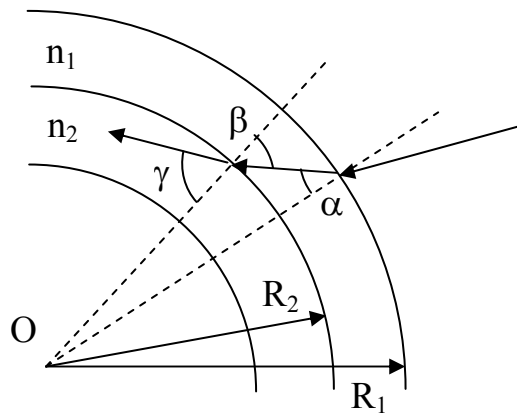
$$n(r) = \begin{cases} n_0 \frac{r}{r_0} & , \quad r \geq r_0 \\ n_0 & , \quad r < r_0 \end{cases} .$$

Đường đi của tia laser nằm trong mặt phẳng chứa tâm O . Ở khoảng cách $r_1 > r_0$, tia laser lập góc φ_1 với véc tơ bán kính \mathbf{r}_1 (xem hình vẽ). Tìm biểu thức xác định khoảng cách nhỏ nhất từ tâm O đến tia laser.

Tính khoảng cách nhỏ nhất đó với $n_0 = 1, r_0 = 30\text{cm}, r_1 = 40\text{cm}, \varphi_1 = 30^\circ$.



Bài giải



Chia môi trường thành các lớp cầu có độ dày đủ nhỏ để có thể xem môi trường trong từng lớp là đồng nhất có cùng chiết suất. Xét hai lớp kề nhau bất kỳ có chiết suất n_1 và n_2 như trên hình vẽ. Theo định luật Snell ta có

$$n_1 \sin \beta = n_2 \sin \gamma \quad . \quad (1)$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\frac{\sin \alpha}{R_2} = \frac{\sin \beta}{R_1} \quad \rightarrow \quad \sin \beta = \frac{R_1}{R_2} \sin \alpha \quad . \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta nhận được

$$n_1 R_1 \sin \alpha = n_2 R_2 \sin \gamma \quad . \quad (3)$$

Tổng quát, dọc theo đường đi của tia laser, ta có

$$r n(r) \sin \varphi(r) = \text{const} \quad . \quad (4)$$

trong đó $\varphi(r)$ là góc giữa tia laser và bán kính tại điểm tới trên mặt cầu bán kính r . Hằng số bên vế phải của (4) có thể chọn là

$$\text{const} = r_1 n(r_1) \sin \varphi(r_1) \quad . \quad (5)$$

Thay biểu thức của $n(r)$ vào (4) và (5), ta nhận được

$$\frac{n_0}{r_0} r^2 \sin \varphi(r) = \frac{n_0}{r_0} r_1^2 \sin \varphi(r_1) \quad \text{nếu } r \geq r_0 \quad , \quad (6)$$

$$r n_0 \sin \varphi(r) = \frac{n_0}{r_0} r_1^2 \sin \varphi(r_1) \quad \text{nếu } r < r_0 \quad . \quad (7)$$

Tại khoảng cách cực tiểu $r = r_{\min}$ ta có

$$d(r^2) = 0 \quad \text{hay} \quad r \cdot dr = 0 \quad . \quad (8)$$

Điều này có nghĩa hướng truyền của tia laser vuông góc với bán kính r , tức là $\varphi(r_{\min}) = 90^\circ$. Do đó

$$\frac{n_0}{r_0} r_{\min}^2 = \frac{n_0}{r_0} r_1^2 \sin \varphi(r_1) \quad \text{nếu } r_{\min} \geq r_0 \quad , \quad (9)$$

$$r_{\min} n_0 = \frac{n_0}{r_0} r_1^2 \sin \varphi(r_1) \quad \text{nếu } r_{\min} < r_0 \quad . \quad (10)$$

Suy ra

$$r_{\min} = r_1 \sqrt{\sin \varphi_1} \quad \text{nếu } r_1 \sqrt{\sin \varphi_1} \geq r_0 \quad , \quad (11)$$

$$r_{\min} = \frac{r_1^2}{r_0} \sin \varphi_1 \quad \text{nếu } r_1 \sqrt{\sin \varphi_1} < r_0 \quad . \quad (12)$$

(Nếu $r_1 \sqrt{\sin \varphi_1} < r_0$, tức là $\sin \varphi_1 < \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2$, góc $\varphi(r_0) \equiv \varphi_0$ giữa hướng truyền của tia laser với bán kính tại khoảng cách r_0 nhỏ hơn 90° . Tia laser sẽ đi thẳng trong miền bán kính r_0).

Với các giá trị số đã cho, ta có

$$\sin \varphi_1 = \frac{1}{2} < \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 = \frac{9}{16} \quad .$$

Do đó r_{\min} được xác định bởi biểu thức (12), $r_{\min} \approx 26,7$ cm.